前期日程

平成29年度入学試験問題（前期日程）

数　学

（理工学部）

―――― 解答上の注意事項 ――――

1. 「解答始め」の合図があるまで問題を見てはならない。

2. 問題冊子1冊および解答紙4枚がある。解答紙は1枚ずつ切り離して使用すること。

3. 問題は $\boxed{1}$ から $\boxed{4}$ まで4問ある。各問の解答は所定の解答紙にのみ記入すること。

4. 解答紙の裏面を使う場合は，続きの解答を裏面の仕切り線の下に記入すること。

5. 解答しない問題がある場合でも，解答紙4枚すべてを提出すること。

6. 問題冊子は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 平面上に三角形OABがあり，点A$'$，B$'$は$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を満たしているとする。線分A$'B'$を$2:1$に内分する点をPとし，線分OPと線分ABの交点をQとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$とするとき，次の問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$\vec{a}$および$\vec{b}$を用いて表せ。

(2) $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}$を求めよ。

(3) $|\vec{a}| = \sqrt{5}$，$|\vec{b}| = \sqrt{3}$であり，さらに$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$が直交しているとき，三角形OABの面積および三角形PABの面積を求めよ。

$\boxed{2}$　a を正の定数とする。関数 $f(x) = \dfrac{(\log ax)^3}{x}$ $(x > 0)$ に対して，次の問に答えよ。

(1) $f(x)$ が $x = b$ で極大値 $\dfrac{54}{e^3}$ をとるとき，a および b を求めよ。

(2) (1) の a に対して，不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ。

(3) (1) の a，b に対して，曲線 $y = f(x)$ $(0 < x \leqq b)$，直線 $x = b$ および x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{3}$ 曲線 $C : y = \dfrac{\sin x}{e^x}$ について，次の問に答えよ。

(1) $\dfrac{\sin x + \cos x}{e^x}$ の導関数および $\dfrac{\sin x}{e^x}$ の不定積分を求めよ。

(2) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，曲線 C の $2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ の部分と x 軸とで囲まれた図形の面積を a_n とする。$S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ と定めるとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

(3) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，曲線 C の $0 \leqq x \leqq n\pi$ の部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_n とする。極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} V_n$ を求めよ。

$\boxed{4}$ 複素数α，βが

$$|\alpha| = 1, \quad |\beta| = \sqrt{2}, \quad |\alpha - \beta| = 1$$

を満たし，$\dfrac{\beta}{\alpha}$の虚部は正であるとする。このとき，次の問に答えよ。

(1) $\dfrac{\beta}{\alpha}$および$\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^8$を求めよ。

(2) $|\alpha + \beta|$を求めよ。

(3) nが8で割ると1余る整数のとき，$|\alpha^n + \beta^n|$をnを用いて表せ。