

後期日程

平成 29 年度入学試験問題（後期日程）

数 学

（理工学部）

————— 解答上の注意事項 —————

1. 「解答始め」の合図があるまで問題を見てはならない。
2. 問題冊子 1 冊および解答紙 4 枚がある。解答紙は 1 枚ずつ切り離して使用すること。
3. 問題は 1 から 4 まで 4 問ある。各問の解答は所定の解答紙にのみ記入すること。
4. 解答紙の裏面を使う場合は、続きの解答を裏面の仕切り線の下に記入すること。
5. 解答しない問題がある場合でも、解答紙 4 枚すべてを提出すること。
6. 問題冊子は持ち帰ること。

1 さいころを4回投げ、1回目の目を a 、2回目の目を b 、3回目の目を c 、4回目の目を d とする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) $a = b = 1$ または $b = c = 1$ または $c = d = 1$ となる確率を求めよ。
- (2) $a = b$ または $b = c$ または $c = d$ となる確率を求めよ。
- (3) $(a, b) = (1, 2)$ または $(b, c) = (1, 2)$ または $(c, d) = (1, 2)$ となる確率を求めよ。

2 $I_0 = \frac{\pi}{2}$ とし, 自然数 n に対して $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ とおく。さらに,

$$\begin{cases} (2n)!! = (2n) \cdot (2n-2) \cdot (2n-4) \cdots 4 \cdot 2 \\ (2n+1)!! = (2n+1) \cdot (2n-1) \cdot (2n-3) \cdots 3 \cdot 1 \end{cases}$$

とおく。このとき, 次の問に答えよ。

(1) $n \geq 2$ のとき, $I_n = k I_{n-2}$ を満たす k を n を用いて表せ。

(2) I_{2n} と I_{2n+1} を n を用いて表せ。

(3)

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \leq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

を示し, さらに極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{(2n)!!\}^2}{(2n-1)!! \cdot (2n+1)!!}$$

を求めよ。

3 次の問に答えよ。

(1) a, b を自然数とするとき,

$$r^{ab} - 1 = (r^a - 1)(r^{a(b-1)} + r^{a(b-2)} + \dots + r^{2a} + r^a + 1)$$

を示せ。

(2) n を自然数とする。命題

「 $2^n - 1$ が素数ならば, n は素数である」

の対偶を証明せよ。

(3) (2) の命題の逆が成り立たないような自然数 n のうち, 最小のものを求めよ。

4 $\frac{1}{2} < a < 2$ を満たす定数 a に対して、点 $A(-1, 0)$, $B(a, 0)$ をとり、点 $P(x, y)$ が原点 O を中心とする半径 2 の円周上を動くとする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) 線分 AP , BP の長さを a と x を用いて表せ。
- (2) $AP + BP$ の最大値および最小値を a を用いて表せ。