農学部（後期）解答例　　**数 学 解 答 紙**〔その一〕

氏　名

受験番号

評点欄

1

1

(1)　右辺を展開すると

$$(\text{右辺})=(r^a-1)(r^{a(b-1)}+r^{a(b-2)}+\cdots+r^{2a}+r^a+1)$$
$$=r^{ab}+r^{ab-a}+\cdots+r^{3a}+r^{2a}+r^a-r^{a(b-1)}-r^{a(b-2)}-\cdots-r^{2a}-r^a-1$$
$$=r^{ab}-1=(\text{左辺})$$

よって，成り立つ。

(別解)

$r^a\fallingdotseq 1$ のとき，等比数列の和の公式を利用すると

$$1+r^a+r^{2a}+\cdots+r^{a(b-2)}+r^{a(b-1)}=\frac{1\cdot(r^{ab}-1)}{r^a-1}=\frac{r^{ab}-1}{r^a-1}$$

$$\therefore\ r^{ab}-1=(r^a-1)(r^{a(b-1)}+r^{a(b-2)}+\cdots+r^{2a}+r^a+1)$$

これは $r^a=1$ のときも成り立つ。

(2)　与えられた命題の対偶は

「n が素数でないならば，2^n-1 は素数でない」である。

$n=1$ のとき，$2^1-1=1$ より成り立つ。

2 以上の素数でない自然数 n は $n=ab$ (a，b は自然数で $a\geqq 2$，$b\geqq 2$) と表せる。

(1) より $r=2$ のとき

$2^{ab}-1=(2^a-1)(2^{a(b-1)}+2^{a(b-2)}+\cdots+2^{2a}+2^a+1)$ であり

$2^a-1\geqq 2$，$2^{a(b-1)}+2^{a(b-2)}+\cdots+2^{2a}+2^a+1\geqq 2$ なので 2^n-1 は素数でない。

よって，対偶は示せた。

農学部（後期）解答例　数学解答紙〔その二〕

氏名

受験番号

評点欄

2

2

(1) さいころ4回投げたとき，$a=b=1$，$b=c=1$，$c=d=1$ となる事象をそれぞれ A，B，C とすると，

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{36}{6^4},\ P(A\cap B)=P(B\cap C)=\frac{6}{6^4},\ P(C\cap A)=\frac{1}{6^4},$$

$$P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{6^4}$$

であるから

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)\\&\quad-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)\\&=\frac{36+36+36-6-6-1+1}{6^4}=\frac{2}{27}\end{aligned}$$

(2) さいころ4回投げたとき，$a=b$，$b=c$，$c=d$ となる事象をそれぞれ A'，B'，C' とすると，

$$P(A')=P(B')=P(C')=\frac{216}{6^4},\ P(A'\cap B')=P(B'\cap C')=\frac{36}{6^4},$$

$$P(C'\cap A')=\frac{36}{6^4},\ P(A'\cap B'\cap C')=\frac{6}{6^4}$$

であるから

$$\begin{aligned}P(A'\cup B'\cup C')&=P(A')+P(B')+P(C')\\&\quad-P(A'\cap B')-P(B'\cap C')-P(C'\cap A')\\&\quad+P(A'\cap B'\cap C')\\&=\frac{216+216+216-36-36-36+6}{6^4}=\frac{91}{216}\end{aligned}$$

(3) さいころ4回投げたとき，$(a,\ b)=(1,\ 2)$，$(b,\ c)=(1,\ 2)$，$(c,\ d)=(1,\ 2)$ となる事象をそれぞれ A''，B''，C'' とすると，

$$P(A'')=P(B'')=P(C'')=\frac{36}{6^4},\ P(A''\cap B'')=P(B''\cap C'')=0,$$

$$P(C''\cap A'')=\frac{1}{6^4},\ P(A''\cap B''\cap C'')=0$$

であるから

$$\begin{aligned}P(A''\cup B''\cup C'')&=P(A'')+P(B'')+P(C'')\\&\quad-P(A''\cap B'')-P(B''\cap C'')-P(C''\cap A'')\\&\quad+P(A''\cap B''\cap C'')\\&=\frac{36+36+36-0-0-1+0}{6^4}=\frac{107}{1296}\end{aligned}$$

氏　名

農学部（後期）解答例　**数 学 解 答 紙 〔その三〕**　受験番号

3

評点欄 ③

(1) △ABC において，三平方の定理より

$$a^2+b^2=\{2-(a+b)\}^2 \iff \cancel{a^2}+\cancel{b^2}=4-4(a+b)+\cancel{a^2}+\cancel{b^2}+2ab$$

$$\therefore\ a+b=1+\frac{1}{2}ab \quad \cdots ①$$

次に，面積に注目して

$$\frac{1}{2}\cdot a\cdot b=\frac{1}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})r=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot r \qquad \therefore\ ab=2r \quad \cdots ②$$

①，②より　$a+b=1+\dfrac{1}{2}\cdot 2r=1+r$

よって　$a+b=r+1$，$ab=2r$

(2) (1) の結果より，a，b は x の方程式 $x^2-(r+1)x+2r=0$ … ③ の実数解である。

よって，方程式 ③ は $0<x<2$ において重解または異なる 2 つの実数解をもたなければならない。

ここで，$g(x)=x^2-(r+1)x+2r$ とおき，方程式 ③ の判別式を D とすると

$$D=(r+1)^2-4\cdot 2r=r^2-6r+1$$

また，軸の方程式は $x=\dfrac{r+1}{2}$ であるから条件は

$$\begin{cases} D\geqq 0 \\ 0<\dfrac{r+1}{2}<2 \\ g(0)>0 \\ g(2)>0 \end{cases} \iff \begin{cases} r\leqq 3-2\sqrt{2},\ 3+2\sqrt{2}\leqq r \\ -1<r<3 \\ r>0 \end{cases}$$

したがって　$0<r\leqq 3-2\sqrt{2}$

よって，r の最大値は $3-2\sqrt{2}$ であり，このとき ③ の重解は

$$x=\frac{r+1}{2}=2-\sqrt{2}$$

である。$a=b=2-\sqrt{2}$ のとき，$c=2-(a+b)=2\sqrt{2}-2$ であり，これは

$$2\sqrt{2}-2<(2-\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})$$

となり，三角形の成立条件を満たす。

以上より，$a=b=2-\sqrt{2}$ のとき r は最大値 $3-2\sqrt{2}$ をとる。

氏　　名

農学部（後期）解答例　　数 学 解 答 紙〔その四〕　　受験番号

評点欄

4

4

(1)　$f(x)=x^3-ax-1$ より　$f'(x)=3x^2-a$

$a>0$ に注意して $f(x)$ の増減表をかくと下のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{a}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{a}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

増減表より　$x=-\sqrt{\dfrac{a}{3}}$ のとき極大値 $\dfrac{2a}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}-1$ をとり，

$x=\sqrt{\dfrac{a}{3}}$ のとき極小値 $-\dfrac{2a}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}-1$ をとる。

(2)　$x^2-a=\dfrac{1}{x}$ より　$x^3-ax-1=0$　…①

題意を満たすには，方程式①が $x<0$ において重解をもてばよい。

(1)の結果より　$\dfrac{2a}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}-1=0$　　$\therefore\ a=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$　（$\because$ a は実数）

このとき，①の左辺は $\left(x+\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)^2$ で割り切れることにより次のようになる

$$\left(x+\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^2\left(x-2\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=0 \qquad \therefore\ x=-\sqrt{\frac{a}{3}},\ 2\sqrt{\frac{a}{3}}$$

よって，

$x<0$ における C_1，C_2 の共有点の座標は

$$\left(-\sqrt{\frac{a}{3}},\ -\sqrt{\frac{3}{a}}\right)\quad \text{つまり}\quad \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\ -\sqrt[3]{2}\right)$$

$x>0$ における C_1，C_2 の共有点の座標は

$$\left(2\sqrt{\frac{a}{3}},\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{a}}\right)\quad \text{つまり}\quad \left(\sqrt[3]{4},\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$$

(3)　(2)の a に対して $\alpha=-\sqrt{\dfrac{a}{3}}$，$\beta=2\sqrt{\dfrac{a}{3}}$ とし，l の方程式を $y=mx+n$ とおくと，求める図形の面積は

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta\{(mx+n)-(x^2-a)\}dx&=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx\\&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\\&=\frac{1}{6}\left\{2\sqrt{\frac{a}{3}}-\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\right\}^3\\&=\frac{3a}{2}\sqrt{\frac{a}{3}}\\&=\frac{9}{4}\end{aligned}$$