問題資料　医2

<振動と回転>

ミルカさんは僕のノートにこんな問題を書いた。

問題1. 以下の数列の一般項 a_n を n で表せ。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
a_n	1	0	-1	0	1	0	-1	0	$\cdots$

（ミルカ；以下，ミとする）「解けるかな。」

（僕）「簡単だよ。1, 0, −1 を往復する数列だね。振動するといった方がよいかな。」

（ミ）「きみの考えは間違いじゃない。では $\cdots$ その“振動”を一般項で表現してほしいな。」

（僕）「一般項 $\cdots$ つまり a_n を n を使って表せばいいんだな。うーん，場合分けすればできる。」

$n=$ （ア） $(k=0,1,2,\cdots)$　のとき，$a_n=1$

$n=$ （イ） $(k=0,1,2,\cdots)$　のとき，$a_n=0$

$n=$ （ウ） $(k=0,1,2,\cdots)$　のとき，$a_n=-1$

（ミ）「確かに。でも振動らしく見えない。」

（僕）「…」

（ミ）「じゃあ今度は，こういう問題を考えてみよう。一般項はどうなるか。」

問題2. 以下の数列の一般項 b_n を n で表せ。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
b_n	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	$\cdots$

ここで，$i=\sqrt{-1}$ とする。

（僕）「この数列 $\{b_n\}$ は，n が偶数なら $+1$ または -1 が来て，n が奇数なら $+i$ または $-i$ が来る。これも振動みたいなものか。」

（ミ）「複素平面で考えてみよう。複素平面，つまり，x 軸を実数軸とし，y 軸を虚数軸とした

座標平面を考える。そうすると，すべての複素数はこの平面上の一点で表現できる。」

複素数		点
$x+yi$	$\longleftrightarrow$	(x,y)

（僕）(A)「この数列 $\{b_n\}$ を複素平面上の点列と見なすと4つの点の繰り返しになっている。」

（ミ）「では，この点列を複素平面上の原点を中心とした単位円上の点列として捉(とら)えてみたらどうなるだろう。一般に単位円上の点は，その点と原点を結ぶ線が x 軸となす角（偏角）を θ ラジアン（以下，角度の単位ラジアンは省略）とすると，三角関数を用いて次の複素数で表せる。」

（エ）

（ミ）「問題2の数列 $\{b_n\}$ は θ を （オ） ずつ回転した円周上にあることになる。そうすると数列 $\{b_n\}$ の一般項は次の式で表せる。」

$$b_n=(\boxed{（カ）})+i(\boxed{（キ）})\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

（ミ）「ここで問題1の数列 $\{a_n\}$ に戻ってみよう。」

$$\{a_n\}:\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ \cdots$$

（ミ）「君は $\{a_n\}$ のことを 1, 0, −1 の“振動”と言ったよね。あの問題も $\{b_n\}$ と同じように考えてみることができる。」

（僕）「…」

（ミ）「図形的に考える。$\{b_n\}$ の表す4点の実数軸への影を考えると振動が現れる。つまり振動は“回転”の影なんだ。そう考えると $\{a_n\}$ の一般項は次の式で表せる。」

$$a_n=\boxed{（ク）}\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

（ミ）「数列 $\{a_n\}$ はいくつかの視点で見ることができる。《整数が単に並んでいる》と見る視点。それから《実数の数直線上で点が振動している》と見る視点。そしてさらに《複素平面上で点が回転している》と見る視点。自分が見ているのは一次元への影に過ぎないと気がつけば，二次元の円という構造を見出すことができる。整数から実数の数直線へ，数直線から複素平面へと，より高次元な世界を考える。そうすると表現がシンプルになる。シンプルになったほうがよく理解したと言えるかな。一般項を探すというのは，隠された構造を見抜くことなんだ。」

（ミ）「それでは次の問題。」

問題３. 以下の数列の一般項 c_n を n で表せ。

n	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
c_n	1	$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$	1	$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$	$\cdots$

（僕）「1, $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ という３個の数が繰り返して現れる $\cdots$」
（ミ）「本質を捕まえたければ，数列を調べる常套（じょうとう）手段を使うことだね。」
（僕）「数列を調べる常套手段 $\cdots$ 階差数列 $\{d_n\}$ を作ってみようか。」

n	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
d_n	$\frac{-3+\sqrt{3}i}{2}$	$-\sqrt{3}i$	$\frac{3+\sqrt{3}i}{2}$	$\frac{-3+\sqrt{3}i}{2}$	$-\sqrt{3}i$	$\frac{3+\sqrt{3}i}{2}$	$\cdots$

（僕）「繰り返しが現れるけど $\cdots$ うーん，いまひとつわからないな。」
（ミ）「きみは数列を調べる武器として階差しか持っていないのかな。」
（僕）「そうだなあ。あとは２項の差ではなくて比を取るくらいかな $\cdots$ 比を取った数列 $\{e_n\}$ を考えてみようか。」

n	0	1	2	$\cdots$
e_n	$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$	（ケ）	$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$	$\cdots$

（僕）「おっと！」
（ミ）「実はね，数列 $\{c_n\}$ に出てくる３個の数は，どれも［（コ）］乗すると１になる数なんだよ。」
（僕）「本当だ。」
（ミ）「さて，ここで，問題３の答えだけど，$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とおくと，c_n は ω を使って次の式で表すことができるよね。」

$$c_n = \boxed{\text{（サ）}} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

（ミ）(B)<u>「次に，数列 $\{c_n\}$ を複素平面上に図示してみよう。面白いことがわかるよ。」</u>

（僕）「なるほど。」
（ミ）「複素平面上の単位円上に図示できることから数列 $\{c_n\}$ の一般項は三角関数を用いて次の式で表すこともできるよね。これも，問題３の答えだね。」

$$c_n = (\boxed{\text{（シ）}}) + i(\boxed{\text{（ス）}})$$

（僕）「へー，面白いね。」
（ミ）「周期性から円を連想するのは自然だ。繰り返しの源を円に求めるのは自然だ。実数の数直線しか見えない人は“振動”と表現するだろう。でも，複素数の平面が見える人は“回転”に気づく。隠れていた構造に気づく。さあ，これから回転を一般化した式について考えてみよう。これが，以下のド・モアブルの定理へとつながるんだ。」

ド・モアブルの定理：

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \qquad (n \text{ は自然数})$$

（僕）「なるほど。これまでの話の一般化だね。」
（ミ）「さあ，ド・モアブルの定理を，［（セ）］を用いて証明してみよう。」

（証明）
$n=1$ のときは

$$\cos\theta + i\sin\theta = \cos(1\times\theta) + i\sin(1\times\theta)$$

となり，明らか。
$n=k$ のとき

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$$

が成り立つとすると

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} = (\boxed{\text{（ソ）}}) + i(\boxed{\text{（タ）}})$$

となり，

$$\boxed{\text{（ソ）}} = \cos(k+1)\theta, \quad \boxed{\text{（タ）}} = \sin(k+1)\theta$$

なので，$n=k+1$ のときも成り立つ。
したがって，ド・モアブルの定理は全ての自然数に対して成り立つ。

（僕）「意外と簡単に証明できるんだね。」

（ミ）(C)「それじゃあ，nが負の整数の場合はどうなるかな。これは逆回転の場合に相当するけど，このときもド・モアブルの定理は成り立つんだよ。」

（僕）「そうなんだ。」

（ミ）「ド・モアブルの定理は《複素数 $\cos\theta + i\sin\theta$ を n 乗すると複素数 $\cos n\theta + i\sin n\theta$ になる》と主張している。図形的な視点で見ると《単位円上で θ の回転を n 回繰り返すのは $n\theta$ の回転に等しい》という主張になる。数式の向こうに単位円上の点が回転しているのが見えるはずだ。」

（僕）「なるほど。」

（ミ）「ド・モアブルの定理を利用すれば 1 の n 乗根を簡単に求めることができることがわかるかな？」

（僕）「…」

ミルカさんは，ノートに書き始めた。

> $z = \cos\theta + i\sin\theta$ とおくと，1 の n 乗根を求めることは $z^n = 1$ を解くことになる。
>
> $$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = 1$$
>
> $$\cos n\theta + i\sin n\theta = 1$$
>
> この式が成り立つためには，$0 \leqq \theta < 2\pi$ として，
>
> $$n\theta = \boxed{\quad (\text{チ}) \quad} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$
>
> でなければならない。したがって，
>
> $$z = \boxed{\quad (\text{ツ}) \quad} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

（ミ）「わかったかな。」

［結城浩「数学ガール」，ソフトバンククリエイティブ，2007 より改変して引用］

受験番号	

問題資料　医２を読んで次の問いに答えなさい。

問１　資料文中の（ア）～（ツ）に当てはまる最も適切な語句，数値または式を書き入れなさい。

（ア）	$4k$	（イ）	$2k+1$
（ウ）	$4k+2$	（エ）	$\cos\theta + i\sin\theta$
（オ）	$\dfrac{\pi}{2}$	（カ）	$\cos\dfrac{n\pi}{2}$
（キ）	$\sin\dfrac{n\pi}{2}$	（ク）	$\cos\dfrac{n\pi}{2}$
（ケ）	$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$	（コ）	3
（サ）	ω^n	（シ）	$\cos\dfrac{2n\pi}{3}$
（ス）	$\sin\dfrac{2n\pi}{3}$	（セ）	数学的帰納法

受験番号	

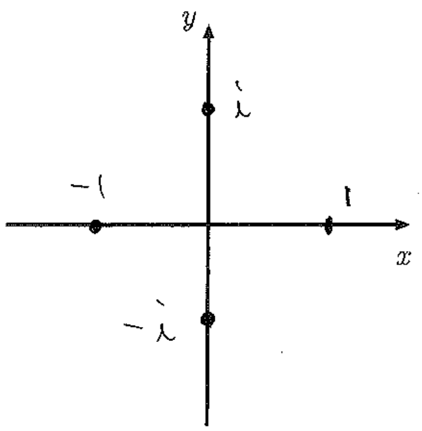
（ソ） $\cos k\theta \cos\theta - \sin k\theta \sin\theta$

（タ） $\sin k\theta \cos\theta + \cos k\theta \sin\theta$

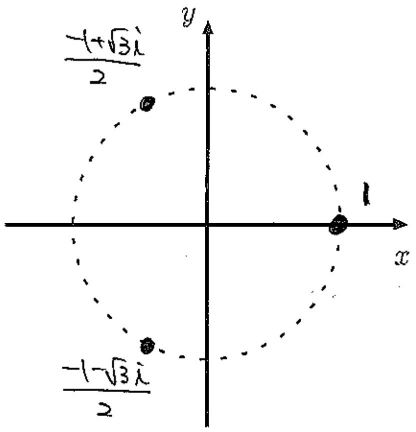
（チ） $2k\pi$

（ツ） $\cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$

問２　下線部 (A) について，数列 $\{b_n\}$ に現れる数を以下の複素平面上に図示し，その座標を記入しなさい。



問３　下線部 (B) について，数列 $\{c_n\}$ に現れる数を以下の複素平面の単位円（図中，破線）上に図示しなさい。



受験番号	

問4 下線部(C)について，n が負の整数の場合にもド・モアブルの定理が成り立つことを示しなさい。(解答は下の枠外にはみ出さないように注意すること)

(証明) $n=-1$ のときは $(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}=\dfrac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}$

$$=\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)}$$

$=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$ より成り立つ.

$n=-k$ のとき $(\cos\theta+i\sin\theta)^{-k}=\cos(-k\theta)+i\sin(-k\theta)$ が成り立つとすると.

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{-(k+1)}=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-k}\cdot(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}$$

$$=(\cos(-k\theta)+i\sin(-k\theta))(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$$

$$=\cos(-k\theta)\cos(-\theta)-\sin(-k\theta)\sin(-\theta)$$

$$+i\{\sin(-k\theta)\cos(-\theta)+\cos(-k\theta)\sin(-\theta)\}$$

$$=\cos\{-(k+1)\theta\}+i\sin\{-(k+1)\theta\}$$

なので. $n=-(k+1)$ のときも成り立つ.

したがって. ド・モアブルの定理はすべての負の整数に対しても成り立つことが.

数学的帰納法により示された.