数学解答紙〔その一〕

氏　名

受験番号

評点欄

1

1

(1) $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ より

$$\frac{1}{n+1} = 1 - 2\cdot\frac{1}{m^2} \iff m^2 n - 2n - 2 = 0$$

すなわち　$n(m^2-2)=2$

ここで，$n \geqq 1$ より

$(m^2-2,\ n)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$

このうち，m，n が自然数となるのは　$(m,\ n)=(2,\ 1)$　のときである。

(2) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ より

$$\frac{2}{n} = \frac{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}{1-\dfrac{1}{mn}} \iff mn - n^2 - 2 = 0$$

すなわち　$n(m-n)=2$

ここで，$n \geqq 1$ より

$(m-n,\ n)=(2,\ 1),\ (1,\ 2)$

よって，求める自然数の組 $(m,\ n)$ は　$(m,\ n)=(3,\ 1),\ (3,\ 2)$

氏　名

数学解答紙〔その二〕

受験番号

2

評点欄

2

(1) $b_n=\dfrac{a_n-2}{a_n+1}$ より

$(a_n+1)b_n=a_n-2$

$(b_n-1)a_n=-b_n-2$

$b_n=1$ のとき成り立たないので，$a_n=-\dfrac{b_n+2}{b_n-1}$ …①

(2) $b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}+1}$

$=\dfrac{\left(1+\dfrac{2}{a_n}\right)-2}{\left(1+\dfrac{2}{a_n}\right)+1}$

$=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a_n-2}{a_n+1}$

$=-\dfrac{1}{2}b_n$

よって数列$\{b_n\}$は，初項 $b_1=\dfrac{a_1-2}{a_1+1}=-\dfrac{1}{2}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列なので

$b_n=-\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ …②

(3) ②を①に代入して $a_n=-\dfrac{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+2}{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n-1}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=-\frac{0+2}{0-1}=2$

氏　名

数学解答紙〔その三〕

受験番号

評点欄

③

3

(1) $\displaystyle\int t\log t\,dt=\frac{t^2}{2}\log t-\int\frac{t^2}{2}\cdot\frac{1}{t}dt=\frac{t^2}{2}\log t-\frac{t^2}{4}+C$ 　（C は積分定数）

(2) $\displaystyle f(x)=x\int_x^{2x}\log t\,dt-\int_x^{2x}t\log t\,dt$

$$=x\Big[t\log t-t\Big]_x^{2x}-\left[\frac{t^2}{2}\log t-\frac{t^2}{4}\right]_x^{2x}\quad (\because (1)\text{ より})$$

$$=x\{2x\log 2x-2x-(x\log x-x)\}-\left\{2x^2\log 2x-x^2-\left(\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}\right)\right\}$$

$$=-\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}$$

また，

$$f'(x)=-\frac{1}{2}\left(2x\log x+x^2\cdot\frac{1}{x}\right)-\frac{x}{2}=-x\log x-x$$

(3) (2) より $f'(x)=-x(\log x+1)$

$f'(x)=0$ より　$x=\dfrac{1}{e}$

よって，$x>0$ における増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{4e^2}$	$\searrow$

したがって，極大値　$\dfrac{1}{4e^2}$　$\left(x=\dfrac{1}{e}\right)$，極小値なし

氏　名

数学解答紙〔その四〕

受験番号

評点欄

④

4

(1) $x=x^3-\left(e-\frac{1}{e}\right)x^2 \iff x(x-e)\left(x+\frac{1}{e}\right)=0$

$x=0, e, -\frac{1}{e}$

(2) C_1 と C_2 を連立して，

$e^x=e^{3x}-\left(e-\frac{1}{e}\right)e^{2x}$

$e^x=X$ とおくと $(X>0)$

$X=X^3-\left(e-\frac{1}{e}\right)X^2 \iff X(X-e)\left(X+\frac{1}{e}\right)=0$

$\therefore$ $X>0$ より $X=e$ 　　$\therefore$ $x=1$

したがって，共有点は1点のみであり，$\mathrm{P}(1, e)$ である。

(3) $f(x)=e^x-\left\{e^{3x}-\left(e-\frac{1}{e}\right)e^{2x}\right\}$ とおくと

$f(x)=X-X^3+\left(e-\frac{1}{e}\right)X^2=-X(X-e)\left(X+\frac{1}{e}\right)$ である。

$x<a=1$ のとき，$0<X<e$ であり，このとき，$-X(X-e)>0$，$\left(X+\frac{1}{e}\right)>0$

よって，$f(x)>0$

したがって，C_1 は C_2 より上側にあることを示せた。

(4) $x<a=1$ のとき，C_1 は C_2 より上側にあるので

$$S(t)=\int_t^1\left\{e^x-\left(e^{3x}-\left(e-\frac{1}{e}\right)e^{2x}\right)\right\}dx$$

$$=\int_t^1\left\{e^x-e^{3x}+\left(e-\frac{1}{e}\right)e^{2x}\right\}dx$$

$$=\left[e^x-\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)e^{2x}\right]_t^1$$

$$=\frac{1}{6}e^3+\frac{1}{2}e-e^t+\frac{1}{3}e^{3t}-\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)e^{2t}$$

$\lim_{t\to-\infty} e^t=0$，$\lim_{t\to-\infty} e^{2t}=0$，$\lim_{t\to-\infty} e^{3t}=0$ より

$$\lim_{t\to-\infty} S(t)=\frac{1}{6}e^3+\frac{1}{2}e$$