平成27年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　名

数学解答紙〔その一〕

受験番号

評点欄

1

1

(1) $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ より

$$\frac{1}{n+1} = 1 - 2\cdot\frac{1}{m^2} \iff m^2 n - 2n - 2 = 0$$

すなわち　$n(m^2-2)=2$

ここで，$n \geqq 1$ より

$(m^2-2,\ n)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$

このうち，m，n が自然数となるのは　$(m,\ n)=(2,\ 1)$　のときである。

(2) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ より

$$\frac{2}{n} = \frac{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}{1-\dfrac{1}{mn}} \iff mn - n^2 - 2 = 0$$

すなわち　$n(m-n)=2$

ここで，$n \geqq 1$ より

$(m-n,\ n)=(2,\ 1),\ (1,\ 2)$

よって，求める自然数の組 $(m,\ n)$ は　$(m,\ n)=(3,\ 1),\ (3,\ 2)$

氏　名

数学解答紙〔その二〕

受験番号

評点欄

②

2

(1)　$b_n=\dfrac{a_n-2}{a_n+1}$ より

$(a_n+1)b_n=a_n-2$

$(b_n-1)a_n=-b_n-2$

$b_n=1$ のとき成り立たないので，$a_n=-\dfrac{b_n+2}{b_n-1}$　$\cdots$①

(2)　$b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}+1}$

$$=\frac{\left(1+\dfrac{2}{a_n}\right)-2}{\left(1+\dfrac{2}{a_n}\right)+1}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n-2}{a_n+1}$$

$$=-\frac{1}{2}b_n$$

よって数列 $\{b_n\}$ は，初項 $b_1=\dfrac{a_1-2}{a_1+1}=-\dfrac{1}{2}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列なので

$$b_n=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\quad\cdots②$$

(3)　②を①に代入して $a_n=-\dfrac{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+2}{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n-1}=\dfrac{2(-2)^n+1}{(-2)^n-1}$

氏　名

数学解答紙〔その三〕

受験番号

評点欄

3

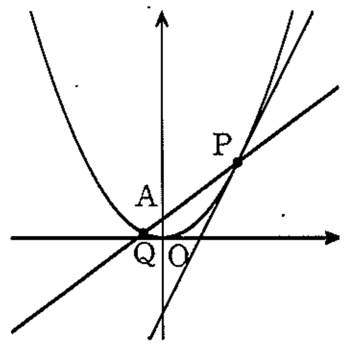
3

(1) $y=x^2$ より　$y'=2x$

よってPにおける接線は　$y=2a(x-a)+a^2$　　$\therefore\ y=2ax-a^2$

この接線と y 軸の交点がBなので点Bの y 座標は　$-a^2$

(2) $a>0$ より　$\mathrm{AB}=a^2+\dfrac{1}{4}\cdots$①



$$\mathrm{AP}=\sqrt{a^2+\left(a^2-\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\left(a^2+\frac{1}{4}\right)^2}=a^2+\frac{1}{4}\cdots②$$

以上①②より　AB=APとなり示せた。

(3) 直線APの方程式は　$y=\left(a-\dfrac{1}{4a}\right)x+\dfrac{1}{4}$

これと C を連立して　$x^2=\left(a-\dfrac{1}{4a}\right)x+\dfrac{1}{4}$

よって　$(x-a)\left(x+\dfrac{1}{4a}\right)=0$　　$\therefore\ x=a,\ -\dfrac{1}{4a}$

点Qは点Pと異なるので　$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{1}{4a},\ \dfrac{1}{16a^2}\right)$

したがって　

$$d=\mathrm{PQ}=\left|a-\left(-\frac{1}{4a}\right)\right|\sqrt{\left(a-\frac{1}{4a}\right)^2+1}$$

$$=\left(a+\frac{1}{4a}\right)\sqrt{\left(a+\frac{1}{4a}\right)^2}$$

$$=\left(a+\frac{1}{4a}\right)^2$$

(4)

$$S=\int_{-\frac{1}{4a}}^{a}\left\{\left(a-\frac{1}{4a}\right)x+\frac{1}{4}-x^2\right\}dx$$

$$=-\int_{-\frac{1}{4a}}^{a}(x-a)\left(x+\frac{1}{4a}\right)dx$$

$$=\frac{1}{6}\left(a+\frac{1}{4a}\right)^3$$

ここで，(3)より　$a+\dfrac{1}{4a}=d^{\frac{1}{2}}$ だから

$$S=\frac{1}{6}\left(d^{\frac{1}{2}}\right)^3=\frac{1}{6}d^{\frac{3}{2}}$$

平成27年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数学解答紙〔その四〕

受験番号

評点欄

4

4

(1)　$2^x>0$，$2^{-x}>0$ なので，相加平均・相乗平均より

$$2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$$

であり，等号成立は $2^x=2^{-x}$ すなわち $x=0$ のときである。

よって t のとりうる値の範囲は $t\geqq 2$

また，$t^2=4^x+2+4^{-x}$ であるから，

$$\begin{aligned} f(x)&=t^2-2-2at+a^2+2a-5 \\ &=t^2-2at+a^2+2a-7 \end{aligned}$$

(2)　$g(t)=t^2-2at+a^2+2a-7$ とおく。

$f(x)=0$ が異なる4個の実数解をもつのは，$g(t)=0$ が $t>2$ の範囲に異なる2つの解をもつときである。

このとき $g(t)=(t-a)^2+2a-7$ より $g(t)=0$ が $t>2$ の範囲に異なる2つの解をもつ条件は，$g(t)=0$ の判別式を D とすると，

$D>0$　かつ　軸について　$a>2$　かつ　$g(2)>0$

$D>0$ より　$-2a+7>0$　　　$\therefore\ a<\dfrac{7}{2}$

$g(2)>0$ より　$a^2-2a-3>0$　　　$\therefore\ a<-1,\ 3<a$

よって求める a の範囲は　$3<a<\dfrac{7}{2}$