氏　　名

数学解答紙〔その一〕

受験番号

評点欄

1

1

(1)　公差を d とすると，$a_{11}=\frac{1}{6}+10d$，$a_{40}=\frac{1}{6}+39d$ なので

$$\sum_{k=11}^{40} a_k=\frac{30\left\{\left(\frac{1}{6}+10d\right)+\left(\frac{1}{6}+39d\right)\right\}}{2}=250 \qquad \therefore\ d=\frac{1}{3}$$

したがって，$a_n=\frac{1}{6}+(n-1)\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}n-\frac{1}{6}$

(2)　(1) より　$\frac{1}{3}n-\frac{1}{6}\leqq 10$　　これを解いて　$n\leqq\frac{61}{2}=30.5$

これを満たす最大の N は　$N=30$

(3)　$N=30$ として

$$\sum_{k=1}^{30} a_k=\frac{30\left\{\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{3}\cdot 30-\frac{1}{6}\right)\right\}}{2}=\frac{300}{2}=150$$

氏　名

数学解答紙〔その二〕

受験番号

2

評点欄

2

(1) $\overrightarrow{AB}=(-a, b, 0)$, $\overrightarrow{AC}=(-a, 0, c)$ となる。

ここで，$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ と $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$ より

$-an_1+bn_2=0$ ……①　　$-an_1+cn_3=0$ ……②

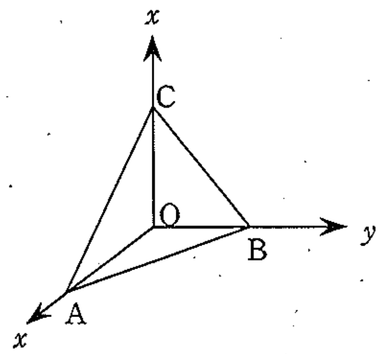
さらに，$|\vec{n}|=1$ より　$n_1{}^2+n_2{}^2+n_3{}^2=1$ ……③

以上，①②③と $n_1>0$ より

$$n_1=\frac{bc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}},\quad n_2=\frac{ca}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}},$$

$$n_3=\frac{ab}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$$

したがって，$\vec{n}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}(bc, ca, ab)$



(2) 点Hは平面 α 上にあるので $\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ （s, t は実数）とおける。

よって，

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}=((1-s-t)a, sb, tc)$ ……④

また，$\overrightarrow{OH}=k\vec{n}$ （k は実数）とおけて

$\overrightarrow{OH}=k\vec{n}=\dfrac{k}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}(bc, ca, ab)$ ……⑤

④⑤より

$$\begin{cases}(1-s-t)a=\dfrac{kbc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}\\ sb=\dfrac{kca}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}\\ tc=\dfrac{kab}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}\\ s=\dfrac{c^2a^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\\ t=\dfrac{a^2b^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\end{cases}$$

よって　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{abc}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}(bc, ca, ab)$

したがって　$|\overrightarrow{OH}|=\dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$

(3) 四面体OABCの体積を V とすると　$V=\dfrac{1}{3}\cdot S_1\cdot a$

また　$V=\dfrac{1}{3}\cdot S\cdot|\overrightarrow{OH}|=\dfrac{1}{3}\cdot S\cdot\dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}=\dfrac{1}{3}\cdot S\cdot an_1$

よって　$\dfrac{1}{3}\cdot S_1\cdot a=\dfrac{1}{3}\cdot S\cdot an_1$　　$\therefore\ S_1=n_1S$

氏　名

数　学　解　答　紙　〔その三〕

受験番号

評点欄

③

3

(1) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin^3\dfrac{\pi}{2}+a\cos2\cdot\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{21}{4}\sin\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{25}{4}-a$

条件より $\dfrac{25}{4}-a=\dfrac{13}{4}$ $\quad\therefore\ a=3$

(2) $a=3$ より $\quad f(\theta)=\sin^3\theta+3\cos2\theta+\dfrac{21}{4}\sin\theta$

ここで，$\cos2\theta=1-2\sin^2\theta$ なので $t=\sin\theta$ とおくと

$$f(\theta)=t^3-6t^2+\frac{21}{4}t+3$$

(3) (2)より $g(t)=t^3-6t^2+\dfrac{21}{4}t+3$ とおくと

$g'(t)=3t^2-12t+\dfrac{21}{4}=\dfrac{3}{4}(2t-1)(2t-7)$

また，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ なので $\quad -1\leqq t\leqq1$

ここで，$-1\leqq t\leqq1$ における増減表は次のようになる。

t	-1	$\cdots$	$\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	$-\dfrac{37}{4}$	$\nearrow$	$\dfrac{17}{4}$	$\searrow$	$\dfrac{13}{4}$

$t=\dfrac{1}{2}$ のとき $\quad \sin\theta=\dfrac{1}{2}$ より $\quad \theta=\dfrac{\pi}{6}$

$t=-1$ のとき $\quad \sin\theta=-1$ より $\quad \theta=-\dfrac{\pi}{2}$

以上より

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき $\quad$ 最大値 $\dfrac{17}{4}$

$\theta=-\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\quad$ 最小値 $-\dfrac{37}{4}$

氏　名

数学解答紙〔その四〕

受験番号

評点欄

4

4

(1)　硬貨を2回投げ終えた時点で点Pが頂点Aに到達するのは，2回とも裏が出たときなので

$$p_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

また，硬貨を3回投げ終えた時点で点Pが頂点Aに到達するのは，1回目と2回目に表が出て，3回目に裏が出たときなので

$$p_3=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

(2)　頂点Aから出発して，頂点Dに止まらずちょうど一周して頂点Aに到着する事象のうち，硬貨をちょうど2回投げて到着するものをS，硬貨をちょうど3回投げて到着するものをTとする。事象S，Tの起こる確率は(1)の結果より，それぞれ$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$となる。

硬貨を4回投げ終えた時点で点Pが頂点Aに到達するのは，事象Sが2回起こるときなので

$$p_4=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$$

硬貨を5回投げ終えた時点で点Pが頂点Aに到達するのは，事象S，Tがそれぞれ1回ずつ起こるときなので

$$p_5={}_2C_1\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{16}$$

(3)　硬貨を12回投げ終えた時点で点Pが頂点Aに到達するのは，

・事象Sが6回

・事象Sが3回，事象Tが2回

・事象Tが4回

の3通りが考えられるので，求める確率は

$$p_{12}=\left(\frac{1}{4}\right)^6+{}_5C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^4=\frac{3}{1024}$$