平成27年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　名

数学解答紙〔その一〕

受験番号

1

評点欄

1

(1) $I=a\int_0^1\left(\frac{b}{a}\right)^t dt=\frac{a}{\log\frac{b}{a}}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^t\right]_0^1=a\cdot\frac{\frac{b}{a}-1}{\log\frac{b}{a}}=\frac{b-a}{\log b-\log a}$

(2) $a>0$, $b>0$ より

（相加平均）≧（相乗平均）より

$$a^{1-t}b^t+a^tb^{1-t}\geqq 2\sqrt{a^{1-t}b^t\cdot a^tb^{1-t}}$$
$$=2\sqrt{ab}$$

$\therefore a^{1-t}b^t+a^tb^{1-t}\geqq 2\sqrt{ab}$ …①

（等号成立は

$a^{1-t}b^t=a^tb^{1-t}$

$b^{2t-1}=a^{2t-1}$

$a=b$ または $t=\frac{1}{2}$

$0<a<b$ より $t=\frac{1}{2}$ ）

また，$u=1-t$ とおくと

t	$0\to1$
u	$1\to0$

$du=-dt$ より

$$I=\int_1^0 a^u b^{1-u}(-du)$$
$$=\int_0^1 a^u b^{1-u}du$$
$$=\int_0^1 a^t b^{1-t}dt$$

よって，

$$2I=\int_0^1(a^{1-t}b^t+a^tb^{1-t})dt$$
$$>\int_0^1 2\sqrt{ab}\,dt$$

$\left(\because ①\text{の等号は } t\neq\frac{1}{2} \text{ のとき成り立たない}\right)$

$$=2\sqrt{ab}\,[t]_0^1$$
$$=2\sqrt{ab}$$
$$\therefore I>\sqrt{ab}$$

(3) $f(x)=1+t(x-1)-x^t$ とおくと $f'(x)=t(1-x^{t-1})$

ここで，$0<t<1$ より $-1<t-1<0$ であり，$x>1$ なので

$0<x^{t-1}<1$

よって，$f'(x)>0$ となり $x>1$ のとき $f(x)$ は単調に増加する

ゆえに，$f(x)>f(1)=0$

$\therefore\ x^t<1+t(x-1)$

(4) $\frac{b}{a}>1$ なので(3)より

$0<t<1$ のとき

$$\left(\frac{b}{a}\right)^t<1+t\left(\frac{b}{a}-1\right)$$
$$a\left(\frac{b}{a}\right)^t<a+t(b-a)$$

よって，$I<\int_0^1\{a+t(b-a)\}dt$

$$=\left[at+\frac{t^2}{2}(b-a)\right]_0^1$$
$$=a+\frac{b-a}{2}$$
$$=\frac{a+b}{2}$$

氏　名

数学解答紙〔その二〕

受験番号

2

評点欄

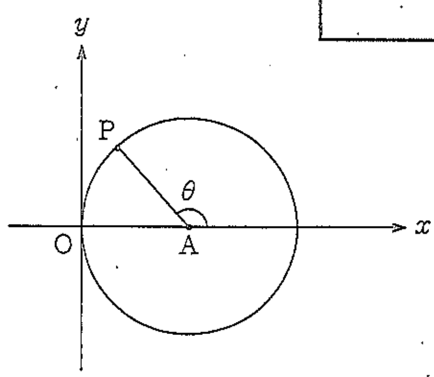
2

(1) $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$

$=(1,0,0)+(\cos\theta,\sin\theta,0)$

$=(1+\cos\theta,\sin\theta,0)$

よって，点Pの座標は，$(1+\cos\theta,\sin\theta,0)$となる。



(2) $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OC}+t(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC})$

$=(1,0,1)+t(\cos\theta,\sin\theta,-1)$

$=(1+t\cos\theta,t\sin\theta,1-t)$　……①

点Qはyz平面上なので，$1+t\cos\theta=0$　$\therefore\ t=-\dfrac{1}{\cos\theta}$

これを①に代入することで点Qの座標は$\left(0,-\tan\theta,1+\dfrac{1}{\cos\theta}\right)$となる。

(3) $Q(0,Y,Z)$とおくと，(2)より　$Y=-\tan\theta,\ Z=1+\dfrac{1}{\cos\theta}$

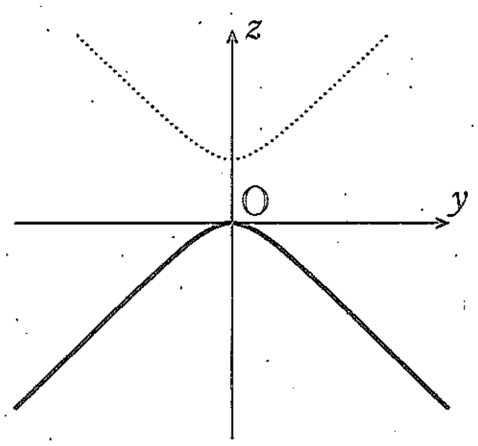
$\therefore\ \tan\theta=-Y$　$\dfrac{1}{\cos\theta}=Z-1$

これを$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$に代入して整理すると，　$Y^2-(Z-1)^2=-1$

を得る。ただし，$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$であるから，　$Z=1+\dfrac{1}{\cos\theta}$より，$Z\leqq 0$

よって点Qの軌跡の方程式は　$x=0,\ y^2-(z-1)^2=-1\ (z\leqq 0)$

これを図示すると下図のようになる。



氏　名

数学解答紙〔その三〕

受験番号

評点欄

3

3

(1)　硬貨を2回投げ終えた時点で点Pが頂点Aに到達するのは，2回とも裏が出たときなので

$$p_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

また，硬貨を3回投げ終えた時点で点Pが頂点Aに到達するのは，1回目と2回目に表が出て，3回目に裏が出たときなので

$$p_3=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

(2)　頂点Aから出発して，頂点Dに止まらずちょうど一周して頂点Aに到着する事象のうち，硬貨をちょうど2回投げて到着するものをS，硬貨をちょうど3回投げて到着するものをTとする。事象S，Tの起こる確率は(1)の結果より，それぞれ$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$となる。

硬貨を4回投げ終えた時点で点Pが頂点Aに到達するのは，事象Sが2回起こるときなので

$$p_4=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$$

硬貨を5回投げ終えた時点で点Pが頂点Aに到達するのは，事象S，Tがそれぞれ1回ずつ起こるときなので

$$p_5={}_2C_1\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{16}$$

(3)　硬貨を12回投げ終えた時点で点Pが頂点Aに到達するのは，

- 事象Sが6回
- 事象Sが3回，事象Tが2回
- 事象Tが4回

の3通りが考えられるので，求める確率は

$$p_{12}=\left(\frac{1}{4}\right)^6+{}_5C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^4=\frac{3}{1024}$$

平成27年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

数学解答紙〔その四〕

受験番号

評点欄

4

4

(1)　$p^{\frac{n}{m}}$ が有理数なので　$p^{\frac{n}{m}}=\dfrac{r}{q}$　（q，r は互いに素な自然数）とおける。

よって　$p^n=\left(\dfrac{r}{q}\right)^m$　　　$\therefore$　$p^n\cdot q^m=r^m$

ここで，左辺は q の倍数なので r^m は q の倍数でなければならないが

q と r は互いに素より　　$q=1$

このとき，$p^n=r^m$ となり，p は素数なので　$r=p^i$（i は自然数）　とかけて

$p^n=p^{im}$

上の式より，$n=im$　となるが n と m の最大公約数が 1 なので　$m=1$

以上より，$x=\dfrac{n}{m}$ のとき p^x が有理数のとき $m=1$ となることが示された。

(2)　$p^x=-x^2+9x-5=-\left(x-\dfrac{9}{2}\right)^2+\dfrac{61}{4}$　……①とおく。

x が有理数のとき p^x が有理数となるので(1)より $m=1$ だから①は整数解をもつ。

①より　$p^x\leqq\dfrac{61}{4}=15.25$　であるから p^x として考えられるのは次の場合だけである。

2^1，2^2，2^3，3^1，3^2，5^1，7^1，11^1，13^1

このとき，x は 1，2，3 のいずれかである。

$x=1$ のとき①に代入して　　$p^1=3$　より　$p=3$

$x=2$ のとき①に代入して　　$p^2=9$　より　$p=3$

$x=3$ のとき①に代入して　　$p^3=13$ より不適である。

以上より，有理数解 x をもつような組は

$(p,\ x)=(3,1),\ (3,2)$