

氏名

## 数学解答紙 [その一]

受験番号

1

評点欄

1

- (1) 公差を  $d$  とすると,  $a_{11} = \frac{1}{6} + 10d$ ,  $a_{40} = \frac{1}{6} + 39d$  なので

$$\sum_{k=11}^{40} a_k = \frac{30 \left\{ \left( \frac{1}{6} + 10d \right) + \left( \frac{1}{6} + 39d \right) \right\}}{2} = 250$$

$$\therefore d = \frac{1}{3}$$

したがって,  $a_n = \frac{1}{6} + (n-1) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}n - \frac{1}{6}$

- (2) (1) より  $\frac{1}{3}n - \frac{1}{6} \leq 10$       これを解いて  $n \leq \frac{61}{2} = 30.5$

これを満たす最大の  $N$  は  $N=30$

- (3)  $N=30$  として

$$\sum_{k=1}^{30} a_k = \frac{30 \left\{ \frac{1}{6} + \left( \frac{1}{3} \cdot 30 - \frac{1}{6} \right) \right\}}{2} = \frac{300}{2} = 150$$

--

数学解答紙 [その二]

--	--	--	--	--

2

評点欄

2
---

(1)  $\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (-a, 0, c)$  となる。

ここで,  $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$  と  $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$  より

$$-an_1 + bn_2 = 0 \quad \dots\dots ① \quad -an_1 + cn_3 = 0 \quad \dots\dots ②$$

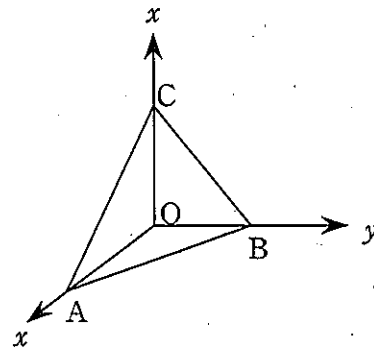
さらに,  $|\vec{n}| = 1$  より  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad \dots\dots ③$

以上, ①②③ と  $n_1 > 0$  より

$$n_1 = \frac{bc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}, \quad n_2 = \frac{ca}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}},$$

$$n_3 = \frac{ab}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

したがって,  $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} (bc, ca, ab)$



(2) 点 H は平面  $\alpha$  上にあるので  $\overrightarrow{AH} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$  ( $s, t$  は実数) とおける。

よって,

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} = ((1-s-t)a, sb, tc) \quad \dots\dots ④$$

また,  $\overrightarrow{OH} = k\vec{n}$  ( $k$  は実数) とおけて

$$\overrightarrow{OH} = k\vec{n} = \frac{k}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} (bc, ca, ab) \quad \dots\dots ⑤$$

④⑤ より

$$\begin{cases} (1-s-t)a = \frac{kbc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \\ sb = \frac{kca}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \\ tc = \frac{kab}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \end{cases} \iff \begin{cases} k = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \\ s = \frac{c^2a^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \\ t = \frac{a^2b^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \end{cases}$$

よって  $\overrightarrow{OH} = \frac{abc}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} (bc, ca, ab)$

したがって  $|\overrightarrow{OH}| = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$

(3) 四面体 OABC の体積を  $V$  とすると  $V = \frac{1}{3} \cdot S_1 \cdot a$

また  $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot |\overrightarrow{OH}| = \frac{1}{3} \cdot S \cdot \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} = \frac{1}{3} \cdot S \cdot an_1$

よって  $\frac{1}{3} \cdot S_1 \cdot a = \frac{1}{3} \cdot S \cdot an_1 \quad \therefore S_1 = n_1 S$

--

## 数学解答紙 [その三]

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

3

評点欄

$$(1) f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin^3 \frac{\pi}{2} + a \cos 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{21}{4} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{25}{4} - a$$

$$\text{条件より } \frac{25}{4} - a = \frac{13}{4} \quad \therefore a = 3$$

$$(2) a=3 \text{ より } f(\theta) = \sin^3 \theta + 3 \cos 2\theta + \frac{21}{4} \sin \theta$$

ここで、 $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$  なので  $t = \sin \theta$  とおくと

$$f(\theta) = t^3 - 6t^2 + \frac{21}{4}t + 3$$

$$(3) (2) \text{ より } g(t) = t^3 - 6t^2 + \frac{21}{4}t + 3 \text{ とおくと}$$

$$g'(t) = 3t^2 - 12t + \frac{21}{4} = \frac{3}{4}(2t-1)(2t-7)$$

$$\text{また、} -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ なので } -1 \leq t \leq 1$$

ここで、 $-1 \leq t \leq 1$  における増減表は次のようになる。

$t$	-1	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$	$-\frac{37}{4}$	$\nearrow$	$\frac{17}{4}$	$\searrow$	$\frac{13}{4}$

$$t = \frac{1}{2} \text{ のとき } \sin \theta = \frac{1}{2} \text{ より } \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$t = -1 \text{ のとき } \sin \theta = -1 \text{ より } \theta = -\frac{\pi}{2}$$

以上より

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ のとき } \text{ 最大値 } \frac{17}{4}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2} \text{ のとき } \text{ 最小値 } -\frac{37}{4}$$

