平成29年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

# 数　学　解　答　紙　〔その一〕

受験番号

評点欄

1

## 1

(1) さいころ4回投げたとき，$a=b=1$，$b=c=1$，$c=d=1$ となる事象をそれぞれ $A$，$B$，$C$ とすると，

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{36}{6^4}，P(A\cap B)=P(B\cap C)=\frac{6}{6^4}，P(C\cap A)=\frac{1}{6^4}，$$

$$P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{6^4}$$

であるから

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)\\&\quad -P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)\\&=\frac{36+36+36-6-6-1+1}{6^4}=\frac{2}{27}\end{aligned}$$

(2) さいころ4回投げたとき，$a=b$，$b=c$，$c=d$ となる事象をそれぞれ $A'$，$B'$，$C'$ とすると，

$$P(A')=P(B')=P(C')=\frac{216}{6^4}，P(A'\cap B')=P(B'\cap C')=\frac{36}{6^4}，$$

$$P(C'\cap A')=\frac{36}{6^4}，P(A'\cap B'\cap C')=\frac{6}{6^4}$$

であるから

$$\begin{aligned}P(A'\cup B'\cup C')&=P(A')+P(B')+P(C')\\&\quad -P(A'\cap B')-P(B'\cap C')-P(C'\cap A')\\&\quad +P(A'\cap B'\cap C')\\&=\frac{216+216+216-36-36-36+6}{6^4}=\frac{91}{216}\end{aligned}$$

(3) さいころ4回投げたとき，$(a,\ b)=(1,\ 2)$，$(b,\ c)=(1,\ 2)$，$(c,\ d)=(1,\ 2)$ となる事象をそれぞれ $A''$，$B''$，$C''$ とすると，

$$P(A'')=P(B'')=P(C'')=\frac{36}{6^4}，P(A''\cap B'')=P(B''\cap C'')=0，$$

$$P(C''\cap A'')=\frac{1}{6^4}，P(A''\cap B''\cap C'')=0$$

であるから

$$\begin{aligned}P(A''\cup B''\cup C'')&=P(A'')+P(B'')+P(C'')\\&\quad -P(A''\cap B'')-P(B''\cap C'')-P(C''\cap A'')\\&\quad +P(A''\cap B''\cap C'')\\&=\frac{36+36+36-0-0-1+0}{6^4}=\frac{107}{1296}\end{aligned}$$

平成29年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

# 数　学　解　答　紙　〔その二〕

受験番号

評点欄

**2**

(1). $n \geqq 2$ のとき.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^{n-1} x\, dx \\
&= \left[-\cos x \cdot \sin^{n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)\cdot(n-1)\cdot \sin^{n-2} x \cdot \cos x\, dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x\, dx \\
&= (n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx\right) \quad (\because \cos^2 x = 1-\sin^2 x \text{ より}). \\
&= (n-1)(I_{n-2} - I_n).
\end{aligned}$$

よって $n \cdot I_n = (n-1) I_{n-2}$

したがって. $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ となるから. $k = \dfrac{n-1}{n}$.

(2). $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$

$= \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

(1)で, $n$を$2n$におき換えて.

$I_{2n} = \dfrac{2n-1}{2n} I_{2n-2}$ $(n \geqq 1)$.

$$\begin{aligned}
\text{よって. } I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} \\
&= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{2n-4} \\
&= \cdots \\
&= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0 \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \quad (\because I_0 = \frac{\pi}{2} \text{ より}).
\end{aligned}$$

(1)で, $n$を$2n+1$におき換えて.

$I_{2n+1} = \dfrac{2n}{2n+1} \cdot I_{2n-1}$ $(n \geqq 1)$

$$\begin{aligned}
\text{よって. } I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1}\cdot I_{2n-1} \\
&= \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot I_{2n-3} \\
&= \cdots \\
&= \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot I_1 \\
&= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \quad (\because I_1 = 1 \text{ より}).
\end{aligned}$$

したがって.

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

(3). $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき.

$0 \leqq \sin x \leqq 1$ であるから.

$\sin^{2n+2} x \leqq \sin^{2n+1} x \leqq \sin^{2n} x$

よって $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} x\, dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} dx$

$$I_{2n+2} \leqq I_{2n+1} \leqq I_{2n}$$

したがって (2)より.

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \leqq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqq \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

が示せた。

この各辺に $\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}$ をかけて.

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n+1)!!\,(2n)!!}{(2n+2)!!\,(2n-1)!!} \leqq \frac{\{(2n)!!\}^2}{(2n-1)!!\,(2n+1)!!} \leqq \frac{\pi}{2}.$$

つまり. $\displaystyle \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} \leqq \frac{\{(2n)!!\}^2}{(2n-1)!!\,(2n+1)!!} \leqq \frac{\pi}{2}.$

ここで

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}} \\
&= \frac{\pi}{2} \text{ であるから.}
\end{aligned}$$

はさみうちの原理を用いて.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\{(2n)!!\}^2}{(2n-1)!!\,(2n+1)!!} = \frac{\pi}{2}$$

氏　名

# 数学解答紙〔その三〕

受験番号

## 3

評点欄

3

(1)　右辺を展開すると

$(\text{右辺})=(r^a-1)(r^{a(b-1)}+r^{a(b-2)}+\cdots+r^{2a}+r^a+1)$

$\quad=r^{ab}+r^{ab-a}+\cdots+r^{3a}+r^{2a}+r^a-r^{a(b-1)}-r^{a(b-2)}-\cdots-r^{2a}-r^a-1$

$\quad=r^{ab}-1=(\text{左辺})$

よって，成り立つ。

(別解)

$r^a\fallingdotseq 1$ のとき，等比数列の和の公式を利用すると

$$1+r^a+r^{2a}+\cdots+r^{a(b-2)}+r^{a(b-1)}=\frac{1\cdot(r^{ab}-1)}{r^a-1}=\frac{r^{ab}-1}{r^a-1}$$

$\therefore\ r^{ab}-1=(r^a-1)(r^{a(b-1)}+r^{a(b-2)}+\cdots+r^{2a}+r^a+1)$

これは $r^a=1$ のときも成り立つ。

(2)　与えられた命題の対偶は

「$n$ が素数でないならば，$2^n-1$ は素数でない」である。

$n=1$ のとき，$2^1-1=1$ より成り立つ。

2 以上の素数でない自然数 $n$ は $n=ab$ ($a$，$b$ は自然数で $a\geqq2$，$b\geqq2$) と表せる。

(1) より $r=2$ のとき

$2^{ab}-1=(2^a-1)(2^{a(b-1)}+2^{a(b-2)}+\cdots+2^{2a}+2^a+1)$ であり

$2^a-1\geqq2$，$2^{a(b-1)}+2^{a(b-2)}+\cdots+2^{2a}+2^a+1\geqq2$ なので $2^n-1$ は素数でない。

よって，対偶は示せた。

(3)　与えられた命題の逆は

「$n$ が素数ならば，$2^n-1$ は素数である」

$n=2$ のとき，$2^2-1=3$　これは素数である。

$n=3$ のとき，$2^3-1=7$　これは素数である。

$n=5$ のとき，$2^5-1=31$　これは素数である。

$n=7$ のとき，$2^7-1=127$　これは素数である。

$n=11$ のとき，$2^{11}-1=2047$ であり，$2047=23\times89$ なので，これは素数ではない。

以上より，求める最小の自然数 $n$ は $n=11$

平成29年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏名

# 数学解答紙〔その四〕

受験番号

評点欄

④

**4** (1). A(-1,0) B(a,0). P(x,y) より

$$AP^2=(x+1)^2+y^2,\quad BP^2=(x-a)^2+y^2.$$

P(x,y) は $x^2+y^2=4$ 上の点より $y^2=4-x^2$

AP>0. BP>0 より

$$AP=\sqrt{(x+1)^2+4-x^2}=\sqrt{2x+5} \quad //$$

$$BP=\sqrt{(x-a)^2+4-x^2}=\sqrt{-2ax+a^2+4} \quad //$$

(2). $-2\leqq x\leqq 2$ のとき

$AP+BP=\sqrt{2x+5}+\sqrt{-2ax+a^2+4}=f(x)$ とおく.

$$f'(x)=\frac{1}{2}(2x+5)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2+\frac{1}{2}(-2ax+a^2+4)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2a)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2x+5}}-\frac{a}{\sqrt{-2ax+a^2+4}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2x+5}\sqrt{-2ax+a^2+4}}\left(\sqrt{-2ax+a^2+4}-a\sqrt{2x+5}\right)$$

$f'(x)=0$ とすると.

$$\sqrt{-2ax+a^2+4}-a\sqrt{2x+5}=0$$

$$\sqrt{-2ax+a^2+4}=a\sqrt{2x+5}$$

$\frac{1}{2}<a<2$ より 両辺 を 2乗して.

$$-2ax+a^2+4=a^2(2x+5)$$

$$2a(a+1)x=-4(a+1)(a-1)$$

$$x=\frac{2(1-a)}{a}$$

$$=2\left(\frac{1}{a}-1\right)$$

ここで. $\frac{1}{2}<a<2$ のとき.

$$-\frac{1}{2}<\frac{1}{a}-1<1$$

$-1<2\left(\frac{1}{a}-1\right)<2$ である

$-2\leqq x\leqq 2$ において. 増減表は下図

| $x$ | $-2$ | $\cdots$ | $2\left(\frac{1}{a}-1\right)$ | $\cdots$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

よって.

$$f(-2)=1+\sqrt{a^2+4a+4}=1+\sqrt{(a+2)^2}$$

$$=1+|a+2|=a+3.$$

$$f(2)=3+\sqrt{a^2-4a+4}=3+\sqrt{(a-2)^2}$$

$$=3+|a-2|=5-a$$

$$f\left(2\left(\frac{1}{a}-1\right)\right)=\sqrt{\frac{a+4}{a}}+\sqrt{a^2+4a}$$

$$=(1+a)\sqrt{\frac{a+4}{a}}$$

以上より

最大値. $(1+a)\sqrt{\frac{a+4}{a}}$ $\left(x=2\left(\frac{1}{a}-1\right)\right)$

最小値 $\begin{cases} a+3 & \left(\frac{1}{2}<a\leqq 1\right) \\ 5-a & (1\leqq a<2) \end{cases}$ //