平成29年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

理工学部解答例　数　学　解　答　紙　〔その一〕

氏　　名

受験番号

評点欄

1

1

(1) 点Pは辺A′B′を2：1に内分するので

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\frac{1}{3}\cdot 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\cdot 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{3}\vec{a}+2\vec{b}$　…答

(2) 点Qは線分OP上にあるので，実数tを用いて

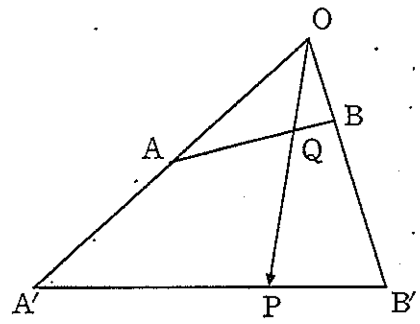
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{3}t\,\vec{a}+2t\,\vec{b}$$

と表される。また，点Qは線分AB上にあるので

$\frac{2}{3}t+2t=1$　　$\therefore\ t=\frac{3}{8}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{8}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

したがって　$\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}=\frac{8}{3}$　…答



(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$が直交しているので　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$より

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{3}\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot(\vec{b}-\vec{a})&=\frac{2}{3}(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a})\\&=\frac{2}{3}(\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}|^2+3|\vec{b}|^2-3\vec{a}\cdot\vec{b})\\&=\frac{2}{3}(-2\vec{a}\cdot\vec{b}-5+9)=0\end{aligned}$$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=2$

したがって，△OABの面積をSとすると

$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5\cdot 3-4}=\frac{\sqrt{11}}{2}$　…答

また，(2)より$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|:|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=8:3$なので△PABの面積は

$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{5}{3}S=\frac{5}{6}\sqrt{11}$　…答

氏　　名

理工学部解答例　数　学　解　答　紙　〔その二〕

受験番号

評点欄

2

(1). $f'(x)=\dfrac{3(\log ax)^2\cdot(\log ax)'\cdot x-(\log ax)^3}{x^2}$

$=\dfrac{3(\log ax)^2\cdot\frac{a}{ax}\cdot x-(\log ax)^3}{x^2}$

$=\dfrac{(\log ax)^2(3-\log ax)}{x^2}$

$f'(x)=0$ となるのは，$\log ax=0, 3$

すなわち $ax=1, e^3$

$a>0$ より $x=\dfrac{1}{a}, \dfrac{e^3}{a}$ のとき．

よって，$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{a}$	$\cdots$	$\frac{e^3}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$

ゆえに，$f(x)$ は $x=\dfrac{e^3}{a}$ のとき，

極大値 $f\left(\dfrac{e^3}{a}\right)=\dfrac{27a}{e^3}$ をとる。

よって $\begin{cases}\dfrac{e^3}{a}=l\\ \dfrac{27a}{e^3}=\dfrac{54}{e^3}\end{cases}$ これを解いて $\begin{cases}a=2\\ l=\dfrac{e^3}{2}\end{cases}$

（これは，$a>0$ をみたす）

(2). $a=2$ より $f(x)=\dfrac{(\log 2x)^3}{x}$

ここで $t=\log 2x$ とおくと

$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{2}{2x}=\dfrac{1}{x}$ より

$dt=\dfrac{dx}{x}$

よって

$\int f(x)dx$

$=\int\dfrac{(\log 2x)^3}{x}dx$

$=\int t^3dt$

$=\dfrac{1}{4}t^4+C$

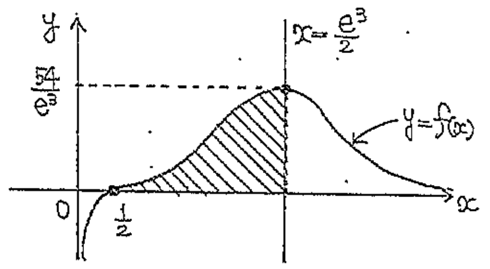
$=\dfrac{1}{4}(\log 2x)^4+C$

（C は積分定数）

(3). $a=2,\ l=\dfrac{e^3}{2}$ より

(1)を利用すると $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{e^3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{54}{e^3}$	$\searrow$



よって求める面積は上の図の斜線部分であるから，

求める面積を S とすると，

$S=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^3}{2}}\dfrac{(\log 2x)^3}{x}dx$

$=\left[\dfrac{1}{4}(\log 2x)^4\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^3}{2}}$

$=\dfrac{1}{4}(\log e^3)^4-\dfrac{1}{4}(\log 1)^4=\dfrac{81}{4}$

氏　　名

理工学部解答例　数学解答紙〔その三〕

受験番号

評点欄

3

3

(1) $\left(\dfrac{\sin x+\cos x}{e^x}\right)'=\dfrac{(\cos x-\sin x)e^x-(\sin x+\cos x)e^x}{e^{2x}}=-\dfrac{2\sin x}{e^x}$ …答

$\displaystyle\int\frac{\sin x}{e^x}dx=\int-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x+\cos x}{e^x}\right)'dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x+\cos x}{e^x}+C$　（Cは積分定数）…答

(2) $2n\pi\leqq x\leqq(2n+1)\pi$ において，$\dfrac{\sin x}{e^x}\geqq0$ なので

$$a_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{e^x}dx=\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x+\cos x}{e^x}\right]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}$$
$$=-\frac{1}{2}\left\{\frac{-1}{e^{(2n+1)\pi}}-\frac{1}{e^{2n\pi}}\right\}=\frac{e^\pi+1}{2e^{(2n+1)\pi}}$$

$\{a_n\}$は初項$\dfrac{e^\pi+1}{2e^\pi}$，公比$\dfrac{1}{e^{2\pi}}$ の等比数列となり，$0<\dfrac{1}{e^{2\pi}}<1$ なのでその無限級数の和は

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\dfrac{e^\pi+1}{2e^\pi}}{1-\dfrac{1}{e^{2\pi}}}=\frac{e^\pi(e^\pi+1)}{2(e^{2\pi}-1)}=\frac{e^\pi(e^\pi+1)}{2(e^\pi+1)(e^\pi-1)}=\frac{e^\pi}{2(e^\pi-1)}$$ …答

(3) $\displaystyle V_n=\pi\int_0^{n\pi}\left(\frac{\sin x}{e^x}\right)^2dx=\pi\int_0^{n\pi}\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos2x}{e^{2x}}dx=\frac{\pi}{2}\left\{\int_0^{n\pi}\frac{1}{e^{2x}}dx-\int_0^{n\pi}\frac{\cos2x}{e^{2x}}dx\right\}$

ここで，$\displaystyle\int_0^{n\pi}\frac{1}{e^{2x}}dx=\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^{2x}}\right]_0^{n\pi}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^{2n\pi}}$

また，$\displaystyle\int_0^{n\pi}\frac{\cos2x}{e^{2x}}dx$ について，(1) と同様に

$$\left(\frac{\sin2x-\cos2x}{e^{2x}}\right)'=\frac{(2\sin2x+2\cos2x)e^{2x}-(\sin2x-\cos2x)\cdot2e^{2x}}{e^{4x}}=\frac{4\cos2x}{e^{2x}}$$

を利用すると，

$$\int_0^{n\pi}\frac{\cos2x}{e^{2x}}dx=\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin2x-\cos2x}{e^{2x}}\right]_0^{n\pi}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4e^{2n\pi}}$$

よって，$\displaystyle V_n=\frac{\pi}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^{2n\pi}}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4e^{2n\pi}}\right)\right\}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4e^{2n\pi}}\right)$

$\displaystyle\therefore\ \lim_{n\to\infty}V_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4e^{2n\pi}}\right)=\frac{\pi}{8}$ …答

氏　名

理工学部解答例　数学解答紙〔その四〕

受験番号

評点欄

4

4

(1) 複素数平面上で A(α), B(β) とおく。$|\alpha|=1$, $|\beta|=\sqrt{2}$, $|\alpha-\beta|=1$ より

△OABは，OA=1，OB=$\sqrt{2}$，AB=1 の直角二等辺三角形である。

よって　$\angle \mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{4}$

これと，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ の虚部が正であることから，B は A を点 O を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転し，

さらに点 O からの距離を $\sqrt{2}$ 倍した点なので，

$$\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=1+i \qquad \cdots 答$$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^8=\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^8=\sqrt{2}^{\,8}(\cos2\pi+i\sin2\pi)=16 \qquad \cdots 答$$

(2) (1)から，$\beta=(1+i)\alpha$ なので

$$|\alpha+\beta|=|\alpha+(1+i)\alpha|=|\alpha||2+i|=1\cdot\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5} \qquad \cdots 答$$

(3) $|\alpha^n+\beta^n|$

$=|\alpha^n+(1+i)^n\alpha^n|$

$=|\alpha|^n|1+(1+i)^n|$

$=1\cdot\left|1+(\sqrt{2})^n\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^n\right|$

$=\left|1+2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\dfrac{n\pi}{4}+i\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)\right|$

$=\left|1+2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)\right|$　（$\because$ $n=8k+1$（k は 0 以上の整数））

$=\left|1+2^{\frac{n}{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right|$

$=\left|1+2^{\frac{n-1}{2}}+2^{\frac{n-1}{2}}i\right|$

$=\sqrt{\left(1+2^{\frac{n-1}{2}}\right)^2+2^{n-1}}$

$=\sqrt{2^n+2^{\frac{n+1}{2}}+1} \qquad \cdots 答$