平成29年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

医学部解答例　　数　学　解　答　紙　〔その一〕

受験番号

評点欄 1

1

(1). $f'(x)=\dfrac{3(\log ax)^2\cdot(\log ax)'\cdot x-(\log ax)^3}{x^2}$

$=\dfrac{3(\log ax)^2\cdot\frac{a}{ax}\cdot x-(\log ax)^3}{x^2}$

$=\dfrac{(\log ax)^2(3-\log ax)}{x^2}$

$f'(x)=0$ となるのは、$\log ax=0, 3$

すなわち $ax=1, e^3$

$a>0$ より $x=\frac{1}{a}, \frac{e^3}{a}$ のとき。

よって、$f(x)$ の増減表は、次のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{a}$	$\cdots$	$\frac{e^3}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	↗		↗		↘

ゆえに、$f(x)$ は $x=\frac{e^3}{a}$ のとき、

極大値 $f\left(\frac{e^3}{a}\right)=\frac{27a}{e^3}$ をとる。

よって $\begin{cases}\frac{e^3}{a}=\ell\\ \frac{27a}{e^3}=\frac{54}{e^3}\end{cases}$　これを解いて、$\begin{cases}a=2\\ \ell=\frac{e^3}{2}\end{cases}$

（これは、$a>0$ をみたす）

(2). $a=2$ より $f(x)=\frac{(\log 2x)^3}{x}$.

ここで $t=\log 2x$ とおくと.

$\frac{dt}{dx}=\frac{2}{2x}=\frac{1}{x}$ より

$dt=\frac{dx}{x}$

よって

$\int f(x)dx$

$=\int\frac{(\log 2x)^3}{x}dx$

$=\int t^3 dt$

$=\frac{1}{4}t^4+C$

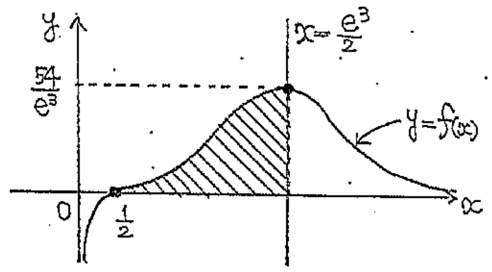
$=\frac{1}{4}(\log 2x)^4+C$

（C は積分定数）

(3). $a=2$, $\ell=\frac{e^3}{2}$ より.

(1)を利用すると、$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{e^3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	↗	0	↗	$\frac{54}{e^3}$	↘



よって、求める面積は上の図の斜線部分であるから、

求める面積を S とすると、

$S=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^3}{2}}\frac{(\log 2x)^3}{x}dx$

$=\left[\frac{1}{4}(\log 2x)^4\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^3}{2}}$

$=\frac{1}{4}(\log e^3)^4-\frac{1}{4}(\log 1)^4=\frac{81}{4}$

氏　名

医学部解答例　　数学解答紙〔その二〕

受験番号

評点欄

2

2

(1) $\left(\dfrac{\sin x+\cos x}{e^x}\right)'=\dfrac{(\cos x-\sin x)e^x-(\sin x+\cos x)e^x}{e^{2x}}=-\dfrac{2\sin x}{e^x}$ …答

$\displaystyle\int\frac{\sin x}{e^x}dx=\int-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x+\cos x}{e^x}\right)'dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x+\cos x}{e^x}+C$ （Cは積分定数） …答

(2) $2n\pi\leqq x\leqq(2n+1)\pi$ において，$\dfrac{\sin x}{e^x}\geqq 0$ なので

$$a_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{e^x}dx=\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x+\cos x}{e^x}\right]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\frac{-1}{e^{(2n+1)\pi}}-\frac{1}{e^{2n\pi}}\right\}=\frac{e^\pi+1}{2e^{(2n+1)\pi}}$$

$\{a_n\}$ は初項 $\dfrac{e^\pi+1}{2e^\pi}$，公比 $\dfrac{1}{e^{2\pi}}$ の等比数列となり，$0<\dfrac{1}{e^{2\pi}}<1$ なのでその無限級数の和は

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\dfrac{e^\pi+1}{2e^\pi}}{1-\dfrac{1}{e^{2\pi}}}=\frac{e^\pi(e^\pi+1)}{2(e^{2\pi}-1)}=\frac{e^\pi(e^\pi+1)}{2(e^\pi+1)(e^\pi-1)}=\frac{e^\pi}{2(e^\pi-1)}$$ …答

(3) $V_n=\pi\displaystyle\int_0^{n\pi}\left(\frac{\sin x}{e^x}\right)^2dx=\pi\int_0^{n\pi}\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos 2x}{e^{2x}}dx=\frac{\pi}{2}\left\{\int_0^{n\pi}\frac{1}{e^{2x}}dx-\int_0^{n\pi}\frac{\cos 2x}{e^{2x}}dx\right\}$

ここで，$\displaystyle\int_0^{n\pi}\frac{1}{e^{2x}}dx=\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^{2x}}\right]_0^{n\pi}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^{2n\pi}}$

また，$\displaystyle\int_0^{n\pi}\frac{\cos 2x}{e^{2x}}dx$ について，(1)と同様に

$$\left(\frac{\sin 2x-\cos 2x}{e^{2x}}\right)'=\frac{(2\sin 2x+2\cos 2x)e^{2x}-(\sin 2x-\cos 2x)\cdot 2e^{2x}}{e^{4x}}=\frac{4\cos 2x}{e^{2x}}$$

を利用すると，

$$\int_0^{n\pi}\frac{\cos 2x}{e^{2x}}dx=\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin 2x-\cos 2x}{e^{2x}}\right]_0^{n\pi}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4e^{2n\pi}}$$

よって，$V_n=\dfrac{\pi}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2e^{2n\pi}}\right)-\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4e^{2n\pi}}\right)\right\}=\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4e^{2n\pi}}\right)$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}V_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4e^{2n\pi}}\right)=\frac{\pi}{8}$ …答

氏　名

医学部解答例　　数 学 解 答 紙 〔その三〕

受験番号

評点欄

③

3

(1) 複素数平面上で A(α), B(β) とおく。$|\alpha|=1$, $|\beta|=\sqrt{2}$, $|\alpha-\beta|=1$ より

△OABは，OA=1，OB=$\sqrt{2}$，AB=1 の直角二等辺三角形である。

よって　$\angle AOB=\dfrac{\pi}{4}$

これと，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ の虚部が正であることから，B は A を点 O を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転し，

さらに点 O からの距離を $\sqrt{2}$ 倍した点なので，

$$\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=1+i \qquad \cdots 答$$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^8=\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^8=\sqrt{2}^{\,8}(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=16 \qquad \cdots 答$$

(2) (1)から，$\beta=(1+i)\alpha$ なので

$$|\alpha+\beta|=|\alpha+(1+i)\alpha|=|\alpha||2+i|=1\cdot\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5} \qquad \cdots 答$$

(3) $|\alpha^n+\beta^n|$

$=|\alpha^n+(1+i)^n\alpha^n|$

$=|\alpha|^n|1+(1+i)^n|$

$=1\cdot\left|1+(\sqrt{2})^n\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^n\right|$

$=\left|1+2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\dfrac{n\pi}{4}+i\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)\right|$

$=\left|1+2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)\right|$　（$\because$ $n=8k+1$（k は 0 以上の整数））

$=\left|1+2^{\frac{n}{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right|$

$=\left|1+2^{\frac{n-1}{2}}+2^{\frac{n-1}{2}}i\right|$

$=\sqrt{\left(1+2^{\frac{n-1}{2}}\right)^2+2^{n-1}}$

$=\sqrt{2^n+2^{\frac{n+1}{2}}+1}$　$\cdots$ 答

平成29年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

医学部解答例　　数 学 解 答 紙〔その四〕

受験番号

4

評点欄

4

(1).

$$f'(x) = \frac{2\cos\left(\frac{\log x}{2}\right)\left(-\sin\frac{\log x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2x}x - \cos^2\left(\frac{\log x}{2}\right)}{x^2}$$

$$= \frac{-\cos\frac{\log x}{2}\left(\sin\frac{\log x}{2} + \cos\frac{\log x}{2}\right)}{x^2}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}\cos\frac{\log x}{2}\,\sin\left(\frac{\log x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ のとき、$\cos\frac{\log x}{2} = 0$, $\sin\left(\frac{\log x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\frac{\log x}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $\frac{\log x}{2} + \frac{\pi}{4} = n\pi$ （n:整数）

$x = e^{\pi + 2n\pi}$, $e^{2n\pi - \frac{\pi}{2}}$

これを小さい順から並べると、

$x = e^{\pi}, e^{\frac{3}{2}\pi}, e^{3\pi}, \cdots$ より

$f(x) = 0$ をみたす x で最小のものは、

$\underline{x = e^{\pi}}$ //

(2).

x	1	$\cdots$	e^{π}	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}\pi}$	$\cdots$	$e^{3\pi}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	1	↘		↗		↘		↗

増減表より $x = e^{\pi + 2n\pi}$ のとき極小値をとり、

$\therefore f(e^{\pi + 2n\pi}) = 0$

また、$e^{\pi + 2(n-1)\pi} \leqq x \leqq e^{\pi + 2n\pi}$ において、

$x = e^{2n\pi - \frac{\pi}{2}}$ で極大かつ最大となり、

$f\left(e^{2n\pi - \frac{\pi}{2}}\right) = e^{-\left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right)}\cos^2\left(n\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{1}{2}e^{-\left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right)}$

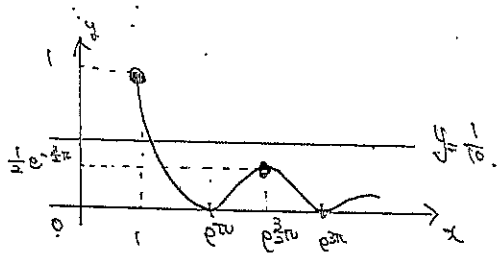
これは、$n=1$ のとき、最も大きくなり、その値は、

$\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}\pi}$ である。

$y = f(x)$ は、$1 \leqq x \leqq e^{\pi}$ のとき、

単調減少であるから、

グラフは下のようになる。



よって、$\frac{1}{10} - \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}\pi} = \frac{e^{-\frac{3}{2}\pi}}{10}\left(e^{\frac{3}{2}\pi} - 5\right) > 0$ より

$\underline{f(x) = \frac{1}{10}\ \text{をみたす}\ x\ \text{はただ1つ存在する。}}$ //

(3). $\frac{\log x}{2} = \theta$ とおくと、$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}$

x	$1 \to t$
θ	$0 \to \frac{\log t}{2}$

よって、

$$\int_1^t \frac{\cos^2\left(\frac{\log x}{2}\right)}{x}dx = \int_0^{\frac{\log t}{2}} \cos^2\theta\cdot 2d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\log t}{2}} (1 + \cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= \left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\log t}{2}}$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\log t + \frac{1}{2}\sin(\log t)}$$ //