平成29年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　　名

農学部解答例　　数 学 解 答 紙 〔その一〕

受験番号

評点欄

1

1

(1) 点Pは辺A′B′を2：1に内分するので

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\frac{1}{3}\cdot 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\cdot 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

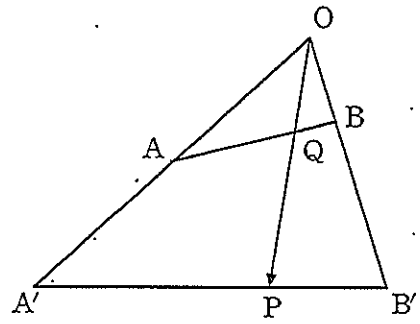
$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{3}\vec{a}+2\vec{b}$$ …答

(2) 点Qは線分OP上にあるので，実数tを用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{3}t\,\vec{a}+2t\,\vec{b}$$

と表される。また，点Qは線分AB上にあるので

$$\frac{2}{3}t+2t=1 \qquad \therefore\ t=\frac{3}{8}$$



よって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OP}} \iff \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{8}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

したがって　$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}=\dfrac{8}{3}$ …答

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$が直交しているので　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ より

$$\left(\frac{2}{3}\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\frac{2}{3}(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$

$$=\frac{2}{3}(\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}|^2+3|\vec{b}|^2-3\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$=\frac{2}{3}(-2\vec{a}\cdot\vec{b}-5+9)=0$$

$$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=2$$

したがって，△OABの面積をSとすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5\cdot 3-4}=\frac{\sqrt{11}}{2}$$ …答

また，(2)より $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|:|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=8:3$ なので△PABの面積は

$$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{5}{3}S=\frac{5}{6}\sqrt{11}$$ …答

平成29年度入学試験（医学部・理工学部・農学部）

氏　名

農学部解答例　　数学解答紙〔その四〕

受験番号

評点欄

4

4

(1) 円 C_2 は線分OAを直径とする円となるので，その中心の座標は $\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right)$

よって，円 C_2 の方程式は $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=1$ …① …答

(2) i) $c\neq 0$ のとき，直線OBの方程式は $y=\frac{d}{c}x$ …②

①，②を連立すると，

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{c}x-\frac{b}{2}\right)^2=1$$

$$\left(1+\frac{d^2}{c^2}\right)x^2-\left(a+\frac{bd}{c}\right)x+\frac{a^2+b^2-4}{4}=0$$

$$\left(1+\frac{d^2}{c^2}\right)x^2-\left(a+\frac{bd}{c}\right)x=0 \qquad (\because a^2+b^2=4)$$

$$x\left\{\left(1+\frac{d^2}{c^2}\right)x-\left(a+\frac{bd}{c}\right)\right\}=0$$

$x\neq 0$ より $x=\dfrac{a+\frac{bd}{c}}{1+\frac{d^2}{c^2}}=\dfrac{(ac+bd)c}{c^2+d^2}=\dfrac{(ac+bd)c}{4}$ $\quad(\because c^2+d^2=4)$

②より $y=\frac{d}{c}\cdot\frac{(ac+bd)c}{4}=\frac{(ac+bd)d}{4}$

$\therefore$ $Q\left(\frac{(ac+bd)c}{4},\ \frac{(ac+bd)d}{4}\right)$ …(※)

ii) $c=0$ のとき，点Bは円 C_1 上の点なので $d=\pm 2$ となり，直線OBの方程式は $x=0$ …③

①，③を連立すると，

$$\left(0-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=1 \iff y^2-by+\frac{a^2+b^2-4}{4}=0$$

$$\iff y(y-b)=0 \qquad (\because a^2+b^2=4)$$

$y\neq 0$ より $y=b$

ゆえに　$Q(0,\ b)$　これは(※)を満たす　$(\because d^2=4)$

i)ii)より，$Q\left(\frac{(ac+bd)c}{4},\ \frac{(ac+bd)d}{4}\right)$ …答

(3) 円 C_2 において円周角と中心角の関係より，$\angle APQ=2\angle AOQ=2\theta$ …答

$\triangle OAQ$ は $\angle OQA=\frac{\pi}{2}$ の直角三角形なので，$\angle OAQ=\frac{\pi}{2}-\theta$ となり，$\triangle OAQ$ において

正弦定理により

$$\frac{OQ}{\sin\angle OAQ}=2\cdot 1 \iff OQ=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

したがって　$OQ=2\cos\theta$ …答